

①

Sonderdruck aus der
Zeitschrift

38. Jahrgang
1970

Bildmessung und Luftbildwesen

Zeitschrift für
Photogrammetrie,
Photointerpretation
und
Luftbildwesen

Schriftleiter
Prof. Dr. rer. techn.
Kurt Schwidersky
Karlsruhe, Englerstr. 7
Universität Karlsruhe

Herbert Wichmann
Verlag
Karlsruhe
Gegründet 1926

Einfache und verknüpfte Polynome zur Darstellung von Verzeichnungskurven

Von F. W. LEBERL, Delft

I. Einleitung

Die vorliegende Arbeit betrachtet einige mathematische Gesichtspunkte und die Verwendung verknüpfter Polynome bei der Darstellung von Verzeichnungskurven. In BuL 2/1969 wurden in einem Artikel von K. SCHWIDEFSKY und H. KELLNER [1] die beobachteten Zusammenhänge zwischen Bildgrößen und radialen Verzeichnungsfehlern mittels einfacher („elementarer“) Interpolations- und Ausgleichspotenzreihen mathematisch formuliert und ein gründlicher empirischer Vergleich verschiedener Ansätze für diese Potenzreihen angestellt. Die daraus ersichtlichen Schwierigkeiten werden nun zuerst resümiert und die Parameter, die die Genauigkeit der Darstellung der Verzeichnungsfehler bestimmen, aufgezählt. Eine Restfehlerabschätzung im voraus dient dazu, Aussagen über den hinreichenden Polynomgrad und das charakteristische Verhalten einfacher Annäherungspotenzreihen zu erhalten. Schließlich werden die verknüpften Polynome behandelt. Dieser Begriff ist nicht neu, doch wenig benutzt. Daher demonstriert eine Reihe numerischer Beispiele die besonderen Kennzeichen der Methode der verknüpften Polynome und ihre universelle Anwendbarkeit.

II. Die Darstellung mit elementaren Potenzreihen

Für die Aufgabe, einen Satz von diskreten Beobachtungswerten (Punkten) oder eine kontinuierliche Kurve mit Hilfe eines mathematischen Ausdruckes anzunähern, müssen

- eine geeignete Funktion gewählt,
- eine Methode festgelegt werden, nach der die Parameter der Funktion bestimmt werden können,
- ein Maß definiert werden, mit dem sich die Güte der Annäherung beurteilen läßt.

Es gibt keine objektive Methode, im voraus die wirksamste Annäherungsfunktion festzulegen, vielmehr muß auf Grund von Erfahrung und rechentechnischen Überlegungen entschieden werden (siehe Abschnitt III). Dabei sollten nicht nur elementare, also algebraische und transzendente, sondern auch nichtelementare Funktionen (z. B. verknüpfte Polynome) betrachtet werden.

Die in [1] untersuchten einfachen Potenzreihen haben den Nachteil, Kurven mit scharfen Biegungen, denen sich ein flaches Stück anschließt, nicht folgen zu können. Sie haben einen „runden“ Verlauf. Wird zur besseren Anpassung der Grad des Polynomes erhöht, so resultiert eine numerisch unstabilere, lokal fluktuierende Funktion. Der Grad kann nur durch Probieren optimallisiert werden [1] (Dies wird durch Verwendung von Orthogonalsystemen vereinfacht). Andere, z. B. Exponential- oder gebrochene rationale Funktionen, führen auf numerische Schwierigkeiten.

Die Verwendung „stückweiser“ („verknüpfter“) Polynome verspricht die Umgehung dieser Nachteile und eine universellere Anpassungsfähigkeit. Für diese wird die Verhältniszahl m/μ als Maß definiert (μ = mittlerer Meßfehler bei der Beobachtung der vorgegebenen Größen; m = mittl. Restabweichung nach der Ausgleichung). Die Güte der Annäherung mit Potenzreihen hängt von folgenden Parametern ab:

- der anzunähernden Kurve $f(x)$
- dem Grad des Annäherungspolynomes,
- der Anzahl und Lage der Stützpunkte (s. [1], d. s. gegebene Punkte der Kurve $f(x)$, die in die Berechnung der Annäherungsfunktion eingehen),
- der Anzahl und Lage der Verknüpfungsstellen bei Verwendung stückweiser Polynome,
- der Art der Verknüpfungsbedingungen,
- der Art der Annäherungsforderung.

Wird letztere so gewählt, daß das Polynom durch die gegebenen Stützwerte hindurchgeht, so spricht man von Interpolation (Kollokation).

Üblicherweise aber wird gefordert, daß die Quadratsumme der Unterschiede zwischen der gegebenen und der sie annähernden Funktion wegen der Beobachtungsfehler in den Stützwerten zu einem Minimum wird:

$$\sum_{r=0}^{r_m} |F(A, r) - f(r)|^2 \rightarrow \min \quad (1)$$

r_m Maximale Radialdistanz im Diapositiv

$f(r)$ Verzeichnungskurve

$F(A, r)$ annähernde Funktion

A gesuchte Koeffizienten

Prinzipiell wäre, vor allem wegen der Spezifikation eines Maximalfehlers [1], auch dessen Minimalisierung mittels

$$\sum_{r=0}^{r_m} |F(A, r) - f(r)| \rightarrow \min.$$

möglich.

Allerdings ist dieses Prinzip nicht wie (1) statistisch fundiert, so wie es bei der Handhabung von Beobachtungen notwendig wäre.

III. Die Abschätzung des Restfehlers im voraus

Für die Kollokation ist eine Abschätzung des Restfehlers a priori theoretisch möglich.

In z. B. [3] wird die Differenz

$$\Delta = f(x) - F_n(A, x) \quad \begin{array}{l} f(x) \dots\dots (n+1) \text{ mal stetig differenzierbar} \\ F_n(A, x) \dots\dots \text{Polynom } n\text{-ten Grades} \end{array}$$

mit Hilfe folgender Formel bestimmt:

$$\Delta \leq \frac{f^{(n+1)}(s) (x - x_0) (x - x_1) \dots\dots (x - x_n)}{(n+1)!}$$

$f^{(n+1)}(s)$ Maximum der $(n+1)$ -ten Ableitung von $f(x)$ für $x_0 \leq s \leq x_n$

$x_0, x_1 \dots\dots x_n$ Abszissen der Stützpunkte

In den Stützpunkten wird $\Delta = 0$. Da die Verzeichnung punktweise vorgegeben ist, muß die maximale $(n+1)$ -te Ableitung von $f(x)$ durch den maximalen Differenzenquotienten derselben Ordnung ersetzt werden:

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\Delta^{(n+1)} f(z)}{h^{(n+1)}} \quad h \dots\dots \text{durchschnittliche Schrittweite in } x$$

$\Delta^{(n+1)} f(z)$ Symbol für die $(n+1)$ -te Differenz von $f(x)$ an der Stelle z ($x_0 \leq z \leq x_n$)

Der Faktor $(x - x_0) (x - x_1) \dots\dots (x - x_n)$ ist bei ungefähr gleichmäßiger Stützpunktverteilung dafür verantwortlich, daß die interpolierenden Polynome gegen den Rand des Annäherungsintervalles $x_0 \leq s \leq x_n$ weiter gegen den Sollwert ausschlagen als in der Mitte, wie dies z. B. ACKERMANN in [2] feststellt. Da sich der endliche Differenzenquotient von beobachteten Funktionswerten in höheren als der 3. Ordnung schon entscheidend von der Ableitung unterscheidet und auch die bloße Tabelle der endlichen Differenzen für höhere als die 3. Ordnung keine Aufschlüsse über die gegebene Funktion gibt, ist diese Methode praktisch für eine Entscheidung über den Polynomgrad von $F(A, x)$ nur für den Fall, daß $f(x)$ vom Grade ≤ 3 ist, sinnvoll.

Für Ausgleichsfunktionen nach dem Prinzip (1) ist die Fehlernorm:

$$\|f(x) - F(A, x)\| = \left(\sum_{i=0}^N f(X_i)^2 - \sum_{j=0}^n (A_j \sum_{i=0}^N f(X_i) X_i^j) \right)^{\frac{1}{2}}$$

N Anzahl der Stützpunkte

n Polynomgrad

Da die Koeffizienten A_j bei der Annäherung mit einfachen Potenzreihen stark voneinander abhängen, ist auch hier kein praktisches Verfahren zur Abschätzung des Restfehlers möglich, ja nicht einmal eindeutig vorhersagbar, ob die Erhöhung des Polynomgrades überhaupt zu einer Verringerung des Fehlers führt.

Für kontinuierlich gegebenes $f(x)$ läßt sich aber zeigen, daß sich dieser Restfehler wie jener bei Kollokationen verhält, also auch gegen den Rand des Annäherungsintervalles ansteigt.

IV. Die Darstellung mit verknüpften Polynomen

Aus dem vorigen Abschnitt geht hervor, daß es an Hilfsmitteln, den Polynomgrad zu optimieren, mangelt.

Dies und der Nachteil des „runden“ Verhaltens stellten auch in der photogrammetrischen Streifenausgleichung ein Problem dar, das durch ACKERMANN'S Ausgleichsmethode, die zusammengesetzte Stücke von Polynomen 3. Ordnung impliziert, umgangen wurde [2]. Diesen Gedanken entwickelte zuletzt KUBIK in [4] weiter und stellte ein Programm mit der expliziten Verwendung verknüpfter Polynome 3. Ordnung für die Streifenausgleichung auf. An den Verknüpfungsstellen haben die Polynome dieselben Funktionswerte, Tangenten und Krümmungen, die Koeffizienten werden nach Prinzip (1) berechnet. Dieses Modell führt auf eine Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen mit Bedingungen unter den Unbekannten. Unter bloßer Berücksichtigung der Streifenachspunkte wurde dieses Programm für die Berechnung der Verzeichnungskurven verwendet.

Durch die gegebenen Werte wird also ein Polynom 3. Ordnung gelegt, dessen Anpassungsfähigkeit durch Unstetigkeiten der intervallweise konstanten 3. Ableitung erreicht wird. Die Funktion fluktuiert nicht im selben Maße wie eine einfache Potenzreihe mit derselben Anzahl von unabhängigen Parametern. Der größere Rechenaufwand verliert im Zeichen der Elektronik seine Bedeutung.

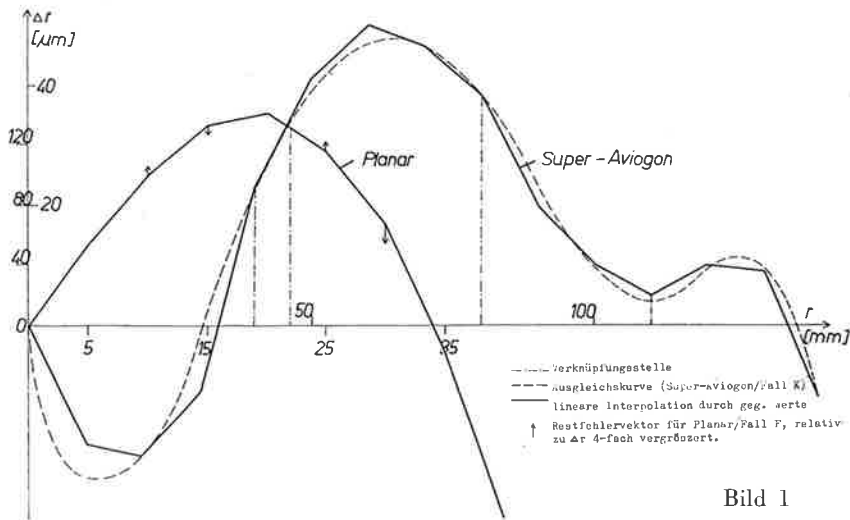


Bild 1

Am ITC werden, soweit nicht die lineare Interpolation zwischen gegebenen Stützwerten den Anforderungen genügt, auch in der Praxis für die Annäherung von Verzeichnungswerten verknüpfte Potenzreihen angewendet.

Durch die Verknüpfungsbedingungen kann durch je drei Stützstellen ein überbestimmtes Polynom 3. Grades gelegt werden. Die durch 15 Stützwerte vorgegebene Verzeichnungskurve des Super-Aviogons z. B. kann durch 7 Polynomstücke 3. Ordnung wiedergegeben werden, wobei noch 5 Freiheitsgrade zur Verfügung bleiben. Es wurden verschiedene Variationen für eine Reihe von Verzeichnungskurven gerechnet. In Tabelle I sind einige der Ergebnisse zusammengefaßt. Die Kurven für das Super-Aviogon und Planar sind in Bild I graphisch dargestellt. (Vgl. [1]).

LEBERL, Einfache und verknüpfte Polynome zur Darstellung von Verzeichnungscurven

Aus der Tabelle I sind Aussagen über die Parameter ableitbar, die die Genauigkeit der Annäherung bestimmen. Der Koeffizient m_s/μ (m_s Restfehler in den Stützpunkten) wächst bei vorgegebener Anzahl der Polynomstücke mit der Zahl der Stützpunkte (s. Fälle D-E-F, G-H-I), der Faktor m_k/μ (m_k Restfehler in den Kontrollpunkten, d. s. bekannte, nicht an der Ausgleichung beteiligte Punkte) aber verringert sich damit. Mit Erhöhung der Polynomanzahl werden beide Faktoren kleiner (s. Fälle E-H-K, C-F-I-L-M). Zwischen den Stützpunkten wachsen die Abweichungen für die gegen den Rand des Interpolationsintervalles gelegenen Polynomstücke. Wie in [I] ist auch hier feststellbar, daß die Lage der Stützpunkte und (hier) auch der Verknüpfungsstellen

Tabelle I Zusammenstellung der Rechenergebnisse.

Ein Kontrollpunkt ist ein in die Ausgleichung nicht eingeführter, gemessener Funktionswert. Die Abweichungen sind in μm angegeben.

Objektiv, Beobachtungs- fehler μ	Fall	Anzahl der verwendeten Polynome	Stützpunkte				Kontrollpunkte		
			Anzahl	Mittl. Ab- weichung	$\frac{m_s}{\mu}$	Maximale Ab- weichung	Mittl. Ab- weichung	$\frac{m_k}{\mu}$	Maximale Ab- weichung
				[μm]		[μm]	[μm]		[μm]
Super-Aviogon $\mu = \pm 0.3 \mu m$	D	2	6	± 7	21	+ 12	± 19	57	+ 33
	E	2	8	± 9	27	+ 16	± 14	42	+ 17
	F	2	15	± 11	33	- 15	—	—	—
	G	3	6	± 1.7	6	+ 3	± 11	33	+ 20
	H	3	8	± 3.6	11	+ 7	± 9	27	- 13
	I	3	15	± 5.8	18	+ 10	—	—	—
	K	4	8	± 0.8	3	+ 2	± 5	15	+ 10
	L	4	15	± 3.1	9	+ 9	—	—	—
	L'	4	15	± 2.5	8	+ 9	—	—	—
M	7	15	± 1.0	3	+ 3.9	—	—	—	
Biogon $\mu = \pm 0.5 \mu m$	E	2	5	± 1.1	2	- 1.7	± 10	20	+ 19
	F	2	9	± 2.8	5	+ 5.5	± 5	10	+ 5
	H	3	5	± 0.6	1	- 1.0	± 9.6	19	+ 12
	I	3	9	± 1.7	3	+ 4.2	± 4	8	+ 5
	L	4	12	± 1.8	3	+ 3.9	—	—	—
	M	5	12	± 0.4	1	+ 1.9	—	—	—
Planar $\mu = \pm 1.5 \mu m$	A	1	3	± 2.3	1.6	- 3.3	± 16	10	+ 23
	B	1	5	± 4.5	3	- 8.5	± 6	4	- 11
	C	1	10	± 2.8	2	+ 6.9	—	—	—
	E	2	5	± 0.2	0.1	+ 0.5	± 2	1.5	+ 3
	F	2	10	± 1.3	1	+ 2.7	—	—	—
	I	3	10	± 0.5	0.3	—	—	—	—
Ross $\mu = \pm 0.6 \mu m$	C	1	10	± 10	20	- 22	—	—	—
	F	2	10	± 2	3	- 4	—	—	—
	H	3	6	± 0.5	1	- 1	± 1.7	3	+ 2.6
	I	3	10	± 0.7	1	+ 1.3	—	—	—

signifikanten Einfluß auf das Ergebnis haben kann: Im Falle des Super-Aviogons brachte die Verlegung eines Verknüpfungspunktes aus dem stark gekrümmten in einen glatteren Kurventeil eine Verringerung des Restfehlers (s. Fall L \rightarrow L'). In glatten Kurvenstücken sind weniger Stützpunkte erforderlich als in solchen starker Krümmung. Die in [1] für die Restfehler in den Stützpunkten spezifizierte Schranke von $\pm 4 \mu\text{m}$ konnte in allen gerechneten Fällen unterschritten werden.

V. Folgerungen

- Eine A-priori-Abschätzung der Genauigkeit der Darstellung von Funktionen ist theoretisch für Interpolationspotenzreihen möglich, ihre Aussagekraft für die Wahl des Polynomgrades ist in der Praxis gering.
- Der Ungewißheit über den Polynomgrad zur Erreichung eines minimalen (optimalen) Restfehlers kann aber durch die Methode der verknüpften Polynome begegnet werden. Die Frage der besten Verknüpfungsbedingungen und des optimalen Grades der zu verknüpfenden Polynomstücke ist dabei von sekundärer Bedeutung, soll aber an anderer Stelle behandelt werden. Das Problem der Wahl des Polynomgrades ist bei gegebener Stützpunktdichte zur Wahl der Anzahl und Lage der Verknüpfungsstellen verschoben.
- Wird jedoch durch je 3 Punkte ein Polynom 3. Ordnung gelegt, so wird die Annäherung in den gerechneten Fällen genügend genau.
- Die Erhöhung der Anzahl der verknüpften Polynome zeigte in allen Berechnungen kein erhöhtes Ausschwingen der Annäherungsfunktion zwischen den Stützstellen (siehe Kontrollpunkte, vgl. Abschnitt III).
- Der Koeffizient m/μ für die Annäherungsgüte darf nicht < 1 werden, da dies bedeuten würde, daß der erwünschte Glättungseffekt der Ausgleichung verlorengeht (PLANAR, Fall I). Die Annäherung kann für $m/\mu = 1$ als optimal betrachtet werden. Auf eine genügend große Anzahl von Freiheitsgraden bei der Wahl der Verknüpfungsstellen ist daher zu achten.

Die formelmäßige Darstellung von Verzeichnungskurven ist nur eine von vielen Anwendungen der Annäherungsrechnung. Die aus Tab. I und den resultierenden Folgerungen ersichtlichen Kennzeichen der Methode der verknüpften Polynome lassen diese also auch für ähnliche Aufgaben in Betracht kommen.

Herrn Dr. K. KUBIK danke ich für die Anregungen zu dieser Arbeit.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit betrachtet einige mathematische Aspekte des Problems der Darstellung von beobachteten Funktionszusammenhängen mittels einfacher Potenzreihen und zeigt die Verwendung verknüpfter Polynome für die Berechnung von Verzeichnungskurven.

Summary

The present paper deals with some mathematical aspects of the representation of observed functional relationships by means of elementary power series and shows the application of joint polynomials for the computation of distortion curves.

Résumé

L'article considère quelques aspects mathématiques dans la représentation de relations fonctionnelles par des polynômes élémentaires et présente l'application de polynômes liés pour le calcul de courbes de distortion.

Schrifttum

- [1] SCHWIDEFSKY K. und H. KELLNER: Darstellung der Verzeichnungsfehler photographischer Objektive durch Potenzreihen - BuL 37, 39-47, 1969.
- [2] ACKERMANN, F.: Fehlertheoretische Untersuchungen über die Genauigkeit photogrammetrischer Streifen-triangulation. DGK-Reihe C Nr. 87, München 1965.
- [3] MILNE, W. E.: Numerical calculus Princetown. Univ. Press 1949.
- [4] KUBIK, K.: Ein Vergleich digitaler Streifen-triangulationsmethoden - BuL 37, 249-260, 1969.